Correction du Devoir Maison 2

Solution de l'exercice 1.

1. On rappelle la formule d'une évolution globale : $1+\frac{t_g}{100} = \left(1+\frac{t_a}{100}\right)\left(1+\frac{t_b}{100}\right)$. Donc dans notre situation,
$$1+\frac{t_2}{100} = \left(1+\frac{t_1}{100}\right)\left(1+\frac{t_1}{100}\right) = \left(1+\frac{15}{100}\right)^2 = 1,3225.$$
Donc,
$$\frac{t_2}{100} = 1,3225-1 \qquad \Leftrightarrow \qquad t_2 = 32,2\%.$$

2. Dans le cas de t_3 on observe trois évolutions $y_0 \overset{t_1}{\curvearrowright} y_1 \overset{t_1}{\curvearrowright} y_2 \overset{t_1}{\curvearrowright} y_3$ et donc
$$1+\frac{t_3}{100} = \left(1+\frac{t_1}{100}\right)\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\left(1+\frac{t_1}{100}\right) = \left(1+\frac{15}{100}\right)^3 = 1,521$$
D'où
$$t_3 = (1,521-1)\times 100 = 52,1\%.$$
Une autre façon est de s'aider de la question précédente et ne compter que deux évolutions : $y_0 \overset{t_2}{\curvearrowright} y_2 \overset{t_1}{\curvearrowright} y_3$. Alors,
$$1+\frac{t_3}{100} = \left(1+\frac{t_2}{100}\right)\left(1+\frac{t_1}{100}\right) = \left(1+\frac{32,2}{100}\right)\left(1+\frac{15}{100}\right) = 1,52.$$
Ici du fait des arrondis précédents le résultat est un peu moins précis mais l'on obtient
$$t_3 = (1,52-1)\times 100 = 52\%.$$

3. On souhaite connaître le taux d'évolution réciproque, la diminution qu'il faut appliquer pour revenir au capital initial. D'après le cours, on sait que $1+\frac{t_r}{100} = \frac{1}{1+\frac{t}{100}}$. Dans notre cas :
$$1+\frac{t_r}{100} = \frac{1}{1+\frac{52,1}{100}} = \frac{1}{1,521} = 0,657.$$
D'où,
$$t_r = (0,657-1)\times 100 = -34,3\%.$$
Le capital doit donc diminuer de $34,3\%$.

4. L'usine augmente son capital de $52,1\%$ pendant trois ans puis décide de le diminuer de 20%. On obtient donc une évolution globale t_g qui correspond à un cumul de deux évolutions : $y_0 \overset{t_3}{\curvearrowright} y_3 \overset{-20\%}{\curvearrowright} y_3'$. Ainsi,
$$1+\frac{t_g}{100} = \left(1+\frac{t_3}{100}\right)\left(1+\frac{-20}{100}\right) = \left(1+\frac{52,1}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right) = 1,521\times 0,8 = 1,217.$$
Donc
$$t_g = (1,217-1)\times 100 = 21,7\%.$$

5. Pour simplifier on donne les valeurs en millions d'euros. On a alors $u_0 = 120$. Au bout de trois ans, on applique une évolution de $t_g = 21,7\%$. On obtient donc

$$u_1 = \left(1 + \frac{21,7}{100}\right) \times 120 = 1,217 \times 120 = 146,04.$$

Au bout des trois ans et après réinvestissement, l'usine possède un capital de $146,04$ millions d'euros.

6. De la même façon,

$$u_2 = \left(1 + \frac{21,7}{100}\right) u_1 = 1,217 \times 146,04 = 177,73.$$

Puis

$$u_3 = 1,217 \times 177,73 = 216,3.$$

7. Tous les trois ans, le capital subit une augmentation de $21,7\%$. Donc le capital u_{n+1} trois ans plus tard est celui trois ans plus tôt u_n multiplier par $1 + \frac{21,7}{100} = 1,217$. C'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

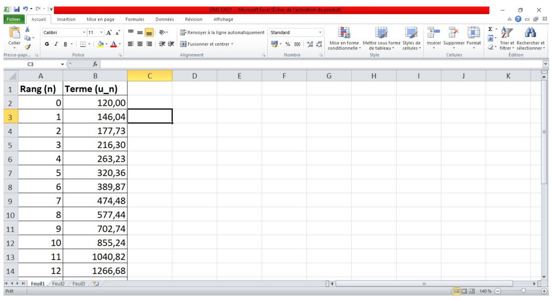
$$u_{n+1} = 1,217u_n.$$

8. On a $1,217 > 1$. Donc $u_{n+1} = 1,217u_n > u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

9. Dans la case $B3$ il faut rentrer la formule suivante :

$$= 1,217 * B2$$

On obtient la feuille de calcul suivante :



Rang (n)	Terme (u_n)
0	120,00
1	146,04
2	177,73
3	216,30
4	263,23
5	320,36
6	389,87
7	474,48
8	577,44
9	702,74
10	855,24
11	1040,82
12	1266,68

10. On observe dans ces calculs que u_n dépasse 1000 pour $n = 11$.

11. Le rang 11 correspond à 11 cycle de trois ans soit $11 \times 3 = 33$ ans. Au bout de 33 ans l'usine possèdera un capital supérieur au milliard d'euros.

Solution de l'exercice 2.

1. Pour calculer $\mathscr{A}$, il nous suffit d'exprimer les longueurs de notre rectangle dans lequel on va découper le patron. L'une des longueur vaut $4c$ et l'autre $h + 2c$. On en déduit que

$$\mathscr{A} = 4c\,(h + 2c)\,.$$

2. Ainsi,

$$h + 2c = \frac{\mathscr{A}}{4c} \qquad \Leftrightarrow \qquad h = \frac{\mathscr{A}}{4c} - 2c,$$

ce qui est bien la formule attendue.

3. D'après le rappel de l'énoncé le volume de la boite vaut l'aire de la base multiplier par la hauteur. L'aire de la base est celle d'un carré de côté c, c'est-à-dire c^2. Donc
$$\mathscr{V} = c^2 \times h.$$
En injectant dans cette formule l'expression de h trouvée dans la question précédente, on obtient
$$\mathscr{V} = c^2 \left(\frac{\mathscr{A}}{4c} - 2c \right) = \frac{c^2 \mathscr{A}}{4c} - c^2 \times 2c = \frac{c\mathscr{A}}{4} - 2c^3.$$
Or $\mathscr{A} = 480$. Donc
$$\mathscr{V} = \frac{480c}{4} - 2c^3 = 120c - 2c^3.$$
4. La fonction $c \mapsto \mathscr{V}(c)$ est une fonction polynôme de degré 3 dont les coefficients sont $a = -2$, $b = 0$, $c = 120$ (le coefficient c et non la variable) et $d = 0$.
5. On en déduit la dérivée de $\mathscr{V}$:
$$\mathscr{V}'(c) = 3 \times (-2)c^2 + 2 \times 0 \times c + 120 = -6c^2 + 120.$$
6. Deux méthodes, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ ici $a = -6$, $b = 0$ et $c = 120$ et donc
$$\Delta = 0^2 - 4 \times (-6) \times 120 = 4^2 \times 20 = 4^2 \times 6^2 \times 5 = 24^2 \times 5.$$
Donc les racines sont
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{24^2 \times 5}}{2 \times (-6)} = \frac{24\sqrt{5}}{12} = 2\sqrt{5}.$$
et
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\sqrt{24^2 \times 5}}{2 \times (-6)} = -\frac{24\sqrt{5}}{12} = -2\sqrt{5}.$$
Autre méthode : on résout directement l'équation $-6c^2 + 120 = 0$
$$-6c^2 + 120 = 0 \Leftrightarrow 120 = 6c^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{120}{6} = 20.$$
Donc les deux solutions/racines sont
$$x_1 = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad x_2 = -\sqrt{20} = -2\sqrt{5}.$$
7. La parabole est orientée vers le bas car $-6 < 0$.
8. Donc le tableau de signe de $\mathscr{V}'$ puis le tableau de variation de $\mathscr{V}$ sont donnés par

c	$-\infty$		$-2\sqrt{5}$		$2\sqrt{5}$		$+\infty$
$\mathscr{V}'(c)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\mathscr{V}$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

9. Voir le tableau précédent.
10. On en déduit que le maximum de $\mathscr{V}$ sur $[0; +\infty[$ est donné pour $c = 2\sqrt{5}$.
11. En utilisant la question 2, on obtient que
$$h = \frac{\mathscr{A}}{4c} - 2c = \frac{480}{4 \times 2\sqrt{5}} - 2 \times 2\sqrt{5} \simeq 18 \text{ cm}.$$